série n°18

Exercice N°1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.

L'exercice consiste à choisir la réponse exacte **avec justification**

1/ Si U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = (-2)^n$ alors

a) U est arithmétique. b) U est géométrique c) U n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2/ Si U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \ln\left(3^n\right)$ alors

a) U est croissante b) U est décroissante c) U n'est ni croissante, ni décroissante

3/ Si U est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = n\,e^{\frac{1}{n}}$ alors

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

4/ Si U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ alors

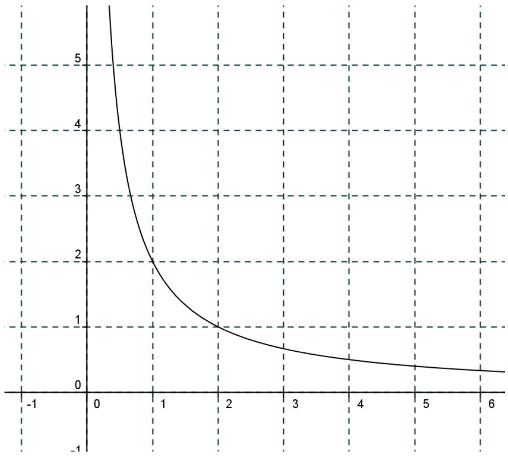
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

5/ On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$

Soit la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

Alors la suite U est

a) décroissante b) croissante c) ni croissante ni décroissante



6/ La limite de la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 0{,}1 + (0{,}5)^n$ est égale à

a) 0,1 b) 0,6 c) $+\infty$

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 1 - 2\ln(x)$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que la droite d'équation x = 0 est asymptote à ζ_f

c) Montrer que pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{2x}$ puis dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle I et que $0.5 < \alpha < 0.7$ et $3.7 < \beta < 3.9$

b) Tracer ζ_f

3/a) Montrer que la fonction F définie sur I par $F(x)=\frac{1}{12}x^3+x-2x\ln(x)$ est une primitive de f sur I

b) Calculer l'aire en unité d'aire de la région du plan limité par ζ_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=3

Exercice N°3

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2-\frac{1}{U_n} \end{cases}$

1/ a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

c) En déduire que la suite U est convergente.

2/ On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 3+\frac{1}{U_n-1}$

a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \frac{n+2}{n+1}$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice N°4

Soit la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n+2\ ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence pour tout entier n on a $u_n \geq 3$

b) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente

c) Déterminer alors sa limite

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \ln(u_n-3)$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison r = -ln3

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Retrouver alors la limite de (u_n)

Exercice N°5

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n+e-1\ ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$ et $v_n = u_n - e$

1) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Déterminer sa limite

2) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite